EJERCICIO TEORÍA CUÁNTICA DE CAMPOS **CAPÍTULO 84**

AUTOR DEL CURSO: Javier García

EJERCICIO RESUELTO: Miguel Ángel Montañez 21-07-2022

Ejercicio 84.1 En un problema (1 + 1), con dos masas que se mueven con velocidades v_a y v_b en un sistema de referencia O arbitrario:

a) Demostrar que la velocidad del sistema de referencia centro de momentos es $v^{COM} = (p_a + p_b)/(E_a + E_b)$.

Sean $\underline{p}_a$ y $\underline{p}_b$ los cuadrimomentos de las partículas a y b; $p_a^0 = E_a$ y $p_b^0 = E_b$ (c = 1), y p_a y p_b los trimomentos respectivos de las partículas (en este caso tienen una sola componente).

$$\underline{p}_a = \begin{pmatrix} E_a \\ p_a \end{pmatrix} \qquad \underline{p}_b = \begin{pmatrix} E_b \\ p_b \end{pmatrix}$$

La matriz Λ^{COM} nos permite pasar de $\underline{p}_a$ y $\underline{p}_b$ a $\underline{p}_a^{COM}$ y $\underline{p}_b^{COM}$:

$$\underline{p}_a^{COM} = \Lambda^{COM} \begin{pmatrix} E_a \\ p_a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_a^{COM} \\ p_a^{COM} \end{pmatrix} \qquad \underline{p}_b^{COM} = \Lambda^{COM} \begin{pmatrix} E_b \\ p_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_b^{COM} \\ p_b^{COM} \end{pmatrix}$$

La expresión de Λ^{COM} es:

$$\Lambda^{COM} = \gamma(v^{COM}) \begin{pmatrix} 1 & -v^{COM} \\ -v^{COM} & 1 \end{pmatrix}$$

Entonces:

$$E_a^{COM} = \gamma(v^{COM})\,(E_a - v^{COM}p_a) \qquad p_a^{COM} = \gamma(v^{COM})\,(-\,v^{COM}E_a + p_a)$$

$$E_b^{COM} = \gamma(v^{COM})\,(E_b - v^{COM}p_b) \qquad p_b^{COM} = \gamma(v^{COM})\,(-\,v^{COM}E_b + p_b)$$

Si tomamos las dos ecuaciones de la derecha y las sumamos:

$$p_a^{COM} + p_b^{COM} = \gamma(v^{COM})\,(-\,v^{COM}E_a + p_a - v^{COM}E_b + p_b)$$

Como por la definición de sistema COM, $p_a^{COM} + p_b^{COM} = 0$, se deduce:

$$v^{COM} = (p_a + p_b)/(E_a + E_b)$$

b) Obtener $\underline{p}_a^{COM}$ y $\underline{p}_b^{COM}$.

La matriz Λ^{COM} con $v^{COM} = (p_a + p_b)/(E_a + E_b)$ toma el siguiente aspecto:

$$\Lambda^{COM} = 1/\left[1 - (p_a + p_b)^2/(E_a + E_b)^2\right]^{1/2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -\,(p_a + p_b)/(E_a + E_b) \\ -\,(p_a + p_b)/(E_a + E_b) & 1 \end{pmatrix}$$

Entonces:

$$\underline{p}_a^{COM} = \Lambda^{COM}\,\underline{p}_a = 1/[(E_a + E_b)^2 - (p_a + p_b)^2]^{1/2} \cdot \begin{pmatrix} E_a^2 + E_aE_b - p_a^2 - p_ap_b \\ E_bp_a - E_ap_b \end{pmatrix}$$

$$\underline{p}_b^{COM} = \Lambda^{COM}\, \underline{p}_b = 1/[(E_a + E_b)^2 - (p_a + p_b)^2]^{1/2} \cdot \begin{pmatrix} E_b^2 + E_aE_b - p_b^2 - p_ap_b \\ \\ E_ap_b - E_bp_a \end{pmatrix}$$

c) Calcular E^{COM}.

Ahora tomamos las dos ecuaciones del apartado a) de la izquierda, y las sumamos:

$$E^{COM} = E_a^{COM} + E_b^{COM} = \gamma(v^{COM})\,(E_a - v^{COM}p_a + E_b - v^{COM}p_b)$$

Sustituimos $\gamma(v^{COM})$ y v^{COM} en la expresión anterior, obteniendo:

$$E^{COM} = 1/\left[(E_a + E_b)^2 - (p_a + p_b)^2\right]^{1/2} \cdot \left[E_a(E_a + E_b) - p_a(p_a + p_b) + E_b(E_a + E_b) - p_b(p_a + p_b)\right]$$

Así pues:

$$E^{COM} = \left[(E_a + E_b)^2 - (p_a + p_b)^2\right]^{1/2}$$

Ejercicio 84.2 Hacer lo mismo que en el ejercicio 84.1 pero para un sistema de referencia LAB con $v_b^{LAB} = 0$:

a) Demostrar que la velocidad del sistema de referencia LAB con $v_b^{LAB} = 0$ es $v^{LAB} = p_b/E_b$.

De igual forma que en el ejercicio anterior:

$$\underline{p}_a = \begin{pmatrix} E_a \\ p_a \end{pmatrix} \qquad \underline{p}_b = \begin{pmatrix} E_b \\ p_b \end{pmatrix}$$

La matriz Λ^{LAB} nos permite pasar $\underline{p}_a$ y $\underline{p}_b$ a $\underline{p}_a^{LAB}$ y $\underline{p}_b^{LAB}$.

$$\underline{p}_a^{LAB} = \Lambda^{LAB} \begin{pmatrix} E_a \\ p_a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_a^{LAB} \\ p_a^{LAB} \end{pmatrix} \qquad \underline{p}_b^{LAB} = \Lambda^{LAB} \begin{pmatrix} E_b \\ p_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_b^{LAB} \\ p_b^{LAB} \end{pmatrix}$$

La expresión de Λ^{LAB} es:

$$\Lambda^{LAB} = \gamma(v^{LAB}) \begin{pmatrix} 1 & -v^{LAB} \\ -v^{LAB} & 1 \end{pmatrix}$$

Entonces:

$$E_a^{LAB} = \gamma(v^{LAB}) (E_a - v^{LAB} p_a) \qquad p_a^{LAB} = \gamma(v^{LAB}) (-v^{LAB} E_a + p_a)$$

$$E_b^{LAB} = \gamma(v^{LAB}) (E_b - v^{LAB} p_b) \qquad p_b^{LAB} = \gamma(v^{LAB}) (-v^{LAB} E_b + p_b)$$

Por la definición de sistema LAB, $p_b^{LAB} = 0$:

$$0 = \gamma(v^{LAB}) (-v^{LAB} E_b + p_b)$$

de lo que se deduce:

$$v^{LAB} = p_b/E_b$$

b) Obtener $\underline{p}_a^{LAB}$ y $\underline{p}_b^{LAB}$.

La matriz Λ^{LAB} con $v^{LAB} = p_b/E_b$ toma el siguiente aspecto:

$$\Lambda^{LAB} = 1/\left(1 - p_b^2/E_b^2\right)^{1/2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -p_b/E_b \\ \\ -p_b/E_b & 1 \end{pmatrix}$$

Entonces:

$$\underline{p}_a^{LAB} = \Lambda^{LAB}\,\underline{p}_a = 1/(E_b^2 - p_b^2)^{1/2} \cdot \begin{pmatrix} E_aE_b - p_ap_b \\ \\ E_bp_a - E_ap_b \end{pmatrix}$$

$$\underline{p}_b^{LAB} = \Lambda^{LAB}\,\underline{p}_b = 1/(E_b^2 - p_b^2)^{1/2} \cdot \begin{pmatrix} E_b^2 - p_b^2 \\ \\ -E_bp_b + E_bp_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (E_b^2 - p_b^2)^{1/2} \\ \\ 0 \end{pmatrix}$$

Podemos comprobar que $v_b^{LAB} = 0$, de acuerdo con la definición.

c) Calcular E^{LAB}.

$$E^{LAB} = E_a^{LAB} + E_b^{LAB} = \gamma(v^{LAB})\,(E_a - v^{LAB}p_a + E_b - v^{LAB}p_b)$$

Sustituimos $\gamma(v^{LAB})$ y v^{LAB} en la expresión anterior, obteniendo:

$$E^{LAB} = 1/(1 - p_b^2/E_b^2)^{1/2} \cdot (E_a - p_b/E_b \cdot p_a + E_b - p_b/E_b \cdot p_b)$$

Así pues:

$$E^{LAB} = 1/(E_b^2 - p_b^2)^{1/2} \cdot (E_aE_b + E_b^2 - p_ap_b - p_b^2)$$

Ejercicio 84.3 Obtener la matriz de cambio de coordenadas que nos lleva del sistema LAB ($v_b = 0$) al sistema COM.

Supongamos que nos encontramos en un sistema de referencia LAB ($v_b = 0$) observando el choque de dos partículas, y queremos encontrar la matriz cambio de coordenadas que nos lleve del sistema LAB al COM.

Razonando de forma similar al ejercicio 84.1 encontramos que la velocidad a la que se tiene que mover el sistema COM respecto al LAB es:

$$v^{COMLAB} = p_a/(E_a + E_b)$$

La función $\gamma(v^{COMLAB})$:

$$\gamma(v^{COMLAB}) = 1/\left[1 - p_a^2/(E_a + E_b)^2\right]^{1/2}$$

Y la matriz Λ^{COMLAB}:

$$\Lambda^{COMLAB} = 1/\left[1 - p_a^2/(E_a + E_b)^2\right]^{1/2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -p_a/(E_a + E_b) \\ -p_a/(E_a + E_b) & 1 \end{pmatrix}$$

Calculamos ahora $\underline{p}_a^{COMLAB}$ y $\underline{p}_b^{COMLAB}$

$$\underline{p}_a^{COMLAB} = \Lambda^{COMLAB}\, \underline{p}_a = 1/\left[(E_a + E_b)^2 - p_a^2\right]^{1/2} \cdot \begin{pmatrix} E_a^2 + E_aE_b - p_a^2 \\ E_bp_a \end{pmatrix}$$

Como $v_b = 0$, $p_b = 0$, de modo que:

$$\underline{p}_b^{COMLAB} = \Lambda^{COMLAB}\, \underline{p}_b = 1/\left[1 - p_a^2/(E_a + E_b)^2\right]^{1/2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & - p_a/(E_a + E_b) \\ - p_a/(E_a + E_b) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_b \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{p}_b^{COMLAB} = \Lambda^{COMLAB}\, \underline{p}_b = 1/\left[(E_a + E_b)^2 - p_a^2\right]^{1/2} \cdot \begin{pmatrix} E_aE_b + E_b^2 \\ - E_bp_a \end{pmatrix}$$

Si sumamos $\underline{p}_a^{COMLAB}$ y $\underline{p}_b^{COMLAB}$:

$$\underline{p}^{COMLAB} = 1/\left[(E_a + E_b)^2 - p_a^2\right]^{1/2} \cdot \begin{pmatrix} (E_a + E_b)^2 - p_a^2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Comprobamos que $p^{COMLAB} = p_a^{COMLAB} + p_b^{COMLAB} = 0$, que es lo que tiene que dar.

Ejercicio 84.4 Demostrar que para un sistema que va de 2 a 2 partículas la suma de las variables Mandelstam: s + t + u = $m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 + m_d^2$.

Las variables Mandelstam se definen:

$$s = (\underline{p}_a + \underline{p}_b)^2 \qquad t = (\underline{p}_a - \underline{p}_c)^2 \qquad u = (\underline{p}_a - \underline{p}_d)^2$$

Si tenemos en cuenta el principio de conservación del momento:

$$\underline{p}_a + \underline{p}_b = \underline{p}_c + \underline{p}_d$$

Como las partículas son reales (on shell):

$$\underline{p}^2 = m^2$$

Sumamos:

$$s + t + u = \underline{p}_a^2 + \underline{p}_b^2 + 2\underline{p}_a\underline{p}_b + \underline{p}_a^2 + \underline{p}_c^2 - 2\underline{p}_a\underline{p}_c + \underline{p}_a^2 + \underline{p}_d^2 - 2\underline{p}_a\underline{p}_d$$

Operamos:

$$s + t + u = 3m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 + m_d^2 + 2\underline{p}_a(\underline{p}_b - \underline{p}_c - \underline{p}_d)$$

Aplicando la conservación del momento:

$$\underline{p}_b - \underline{p}_c - \underline{p}_d = -\underline{p}_a$$

Sustituimos:

$$s + t + u = 3m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 + m_d^2 - 2\underline{p}_a^2$$

Concluyendo la demostración:

$$s + t + u = m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 + m_d^2$$